Uitwerking Tentamen Calculus II 5 april 2012

1.

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta \textbf{ (4 punten) } = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} 4\sin^2\theta d\theta = \int_0^{\pi} (1-\cos 2\theta) d\theta = (\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)|_0^{\pi} = \pi \textbf{ (4 punten)}$$

2. (a)

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = |\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}3^{n+1}} \frac{n\sqrt{n}3^n}{(x+1)^n}| = \frac{n}{n+1}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{3}|x+1| \to \frac{1}{3}|x+1|$$

Dus absolute convergentie voor alle x met $|x+1| < 3$, oftewel voor $x \in (-4, 2)$ **(8 punten)** .
Speciaal onderzoek $x = -4$ en $x = 2$: Voor $x = -4$ is de reeks gelijk aan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ die absoluut convergent is. Voor $x = 2$ is de reeks gelijk aan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ die absoluut convergent is **(4 punten)** .

(b) De reeks convergeert puntsgewijs naar $f(x) = e^x$ **(2 punten)** .
Omdat

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{\tan^{-1} x}{n}| \leq \frac{\pi}{2n} \text{ voor alle } x \in \mathbb{R},$$

is de convergentie uniform **(6 punten)** .

3. (a) Langs de x-as geldt $f(x, 0) = 1$ en dus is de limiet langs de x-as gelijk aan 1 (zelfde voor y-as).

(b) De functie is zeker continu buiten de oorsprong, want quotient van twee continue functies ongelijk aan nul **(2 punten)** .
Verder

$$|\frac{x^2+y^2+2xy^2}{x^2+y^2} - 1| = |\frac{2xy^2}{x^2+y^2}| = |\frac{2xy}{x^2+y^2}||y| \leq |y| \textbf{ (6 punten)}$$

Dus voor iedere $\epsilon > 0$ kies $\delta = \epsilon$. **(2 punten)**

(c) f is op de gehele x-as gelijk aan 1, dus $f_x(0,0) = 0$. Volgt ook uit

$$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

(d) Voor $y \neq 0$ geldt

$$f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)(2x+2y^2) - (x^2+y^2+2xy^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Dus $f_x(0,y) = \frac{2y^4}{y^4} = 2$. Dus $f_x(x,y)$ niet continu in $(0,0)$.

4. (a) De inverse transformatie is

$$x = \frac{u-v}{3}, \quad y = \frac{2u+v}{3}$$

Hiermee gaat $x + y = 1$ over in $\frac{u-v}{3} + \frac{2u+v}{3} = 1$, oftewel $u = 1$.
Verder gaat $x = 0$ over in $u = v$
en $y = 0$ in $v = -2u$.

(b) De Jacobiaan van de transformatie $x = \frac{u-v}{3}, \quad y = \frac{2u+v}{3}$ is $\frac{1}{3}$.

$\int_0^1 \int_{-2u}^u \sqrt{u} v^2 \frac{1}{3} dv du = \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{u} (\frac{1}{3} v^3 |_{v=-2u}^{v=u}) du =$

$\frac{1}{9} \int_0^1 \sqrt{u}(u^3 + 8u^2) du = \frac{2}{9}$

5. Particuliere oplossing van de vorm $y_p(x) = Ax + B$. Invullen geeft $A = 2, B = \frac{12}{25}$. **(3 punten)**
Karakteristieke vergelijking homogene deel is $r^2 - 6r + 25 = 0$ met oplossingen $r_{1,2} = 3 \pm 4i$. **(2 punten)** .
Dus alle oplossingen $y(x) = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x) + 2x + \frac{12}{25}$. **(5 punten)**

6. (a)

$$\frac{2a_n^2}{1+a_n} \leq 2a_n^2 \leq 2a_n$$

omdat vanaf zekere N geldt $a_n \leq 1$. Dus uit vergelijkingskenmerk volgt convergentie.

(b) De algemene term $c_n = \frac{2+a_n^2}{1+a_n}$ convergeert naar 2, en dus is de reeks divergent.